

Zernike 多项式在光学系统中的应用研究

祝战科¹, 金熙², 柯熙政^{2,3*}

(1. 陕西工业职业技术学院 航空工程学院, 陕西 咸阳 712000; 2. 西安理工大学 自动化与信息工程学院, 西安 710048;

3. 陕西省智能协同网络军民共建重点实验室, 西安 710048)

摘要: Zernike 多项式具有正交性、旋转对称性等性质, 可以将复杂的光学波前转化为可解析的数学模式, 为光学系统设计、误差诊断与实时控制提供理论框架。介绍了 Zernike 多项式在光学系统中的波前像差的描述、波面拟合、波前重构、光学图像处理以及在眼科光学中的应用与进展, 最后结合实际指出 Zernike 多项式在应用过程中存在的问题, 并展望其未来的发展方向。

关键词: Zernike 多项式; 波前像差; 工程应用

中图分类号: TN929.11; O439 **文献标志码:** A **文章编号:** 1002-5561(2025)06-0047-07

DOI: 10.13921/j.cnki.issn1002-5561.2025.06.009

Research on the application of Zernike polynomials in optical systems

ZHU Zhanke¹, JIN Xi², KE Xizheng^{2,3*}

(1. Department of Aeronautical Engineering, Shaanxi Polytechnic University, Xianyang Shaanxi 712000, China;

2. Xi'an University of Technology, School of Automation and Information Engineering, Xi'an 710048, China;

3. Shaanxi Civil-Military Integration Key Laboratory of Intelligence Collaborative Networks, Xi'an 710048, China)

Abstract: Zernike polynomials possess properties such as orthogonality and rotational symmetry, enabling the transformation of complex optical wavefronts into analyzable mathematical patterns, thereby providing a theoretical framework for optical system design, error diagnosis, and real-time control. This paper introduces the application and progress of Zernike polynomials in describing wavefront aberrations, wavefront fitting, wavefront reconstruction, optical image processing, and their use in ophthalmic optics. Finally, practical issues in the application of Zernike polynomials are discussed, along with prospects for future development.

Key words: Zernike polynomials, wavefront aberration, engineering applications

0 引言

在高精度成像、光束控制等光学系统中, 波前的

精确描述与校正是保证系统性能的核心环节。光学系统的表现不仅受到光学元件设计及制造质量的制约, 还会受到光波在传播过程中的畸变影响。为了有效描述与分析这类波前畸变, Zernike 多项式作为一种经典的数学工具, 在光学建模与像差研究中得到了广泛应用。

Zernike 多项式能够将复杂波前误差分解为一系列具备明确物理意义的基函数, 从而简洁、高效地描述波前形态。其在透镜、显微镜、望远镜以及激光系统等复杂光学系统中, 不仅可用于表示各类像差, 还可实现对波前畸变的精确建模。基于 Zernike 多项式的波前拟合与重构技术, 为系统性能评估、设计优化以及实时校正提供了理论依据, 并推动了自适应光学

收稿日期: 2025-04-08。

基金项目: 国家自然科学基金面上项目(61377080)资助; 陕西省重点产业创新项目(2017ZDCXL-GY-06-01)资助。

作者简介: 祝战科(1968—), 男, 教授, 高级工程师、咸阳市智能制造装备技术重点实验室主任、陕西省机械工程学会数控自动化分会理事。主要研究方向为光机电一体化装备技术研究。主持获得国家教学成果二等奖1项、陕西省人民政府教学成果一等奖1项、陕西省机械工程学会科技成果二等奖1项等。

***通信作者:** 柯熙政(1962—), 男, 理学博士, 二级教授, 中国电子学会会士, 陕西省教学名师, 俄罗斯自然科学院外籍院士, 主要研究方向为无线光通信。



与波前传感技术的发展。

本文系统分析 Zernike 多项式在波前像差表示、波面拟合、大气湍流与波前重构等方面的主要应用,展望其在未来复杂光学系统中的发展方向与改进潜力。

1 Zernike 多项式的特点

在光学系统中,曲面表征是描述光学元件(透镜、反射镜)表面几何形状的关键技术,直接影响光学系统的成像质量、制造精度和检测方法,常见的有 Zernike 多项式、Q 型多项式、XY 多项式、径向基函数、NURBS 函数等多种描述方法,如表 1 所示。可以看出,与其它曲面表征函数与方法相比,Zernike 多项式提供了更高的灵活性,其具有以下几个特点^[1]:

1) Zernike 正交基组在单位圆域上具有正交完备性。对于具有圆形光学孔径的系统,可将其归一化为单位圆进行分析。基函数的正交特性保证了各阶模式系数之间的解耦关系,有利于消除偶然因素的干扰。

2) Zernike 基函数具有旋转对称性,在光学波前重构领域表现出良好的级数收敛特性。

3) Zernike 多项式与初级光学像差之间可建立一定的对应关系。将 Zernike 多项式与 Seidel 像差函数结合使用,可以更高效地分析光学系统中的像差。

表 1 不同曲面表征函数与方法优缺点对比

曲面表征函数与方法	优点	缺点
Zernike 多项式	每个 Zernike 项的系数可以独立求解,避免了耦合误差;直接对应光学系统的经典像差类型	难以精确表征局部表面缺陷;高阶 Zernike 项对微小表面误差较为敏感
Q 型多项式	通过调整正交化权重,更精确地拟合边缘区域的高阶像差	数学推导和计算复杂度远高于 Zernike 多项式
XY 多项式	允许对曲面局部区域进行精细化调整;提供高效的优化算法和公差分析模块	在定义域内不满足正交性,不同项之间存在相关性;高阶项拟合时,设计矩阵易出现病态
径向基函数	无需划分复杂网格,适用于不规则几何域;直接基于离散点构建方程,减少预处理时间	数据分布不均匀时,边缘或稀疏区域的预测可能产生非物理振荡
NURBS 函数	局部表征能力强,构造灵活	非正交,构造复杂

4) 在拟合光学组件热弹性变形后的面形时, Zernike 多项式具有拟合误差小、物理意义明确等优点,同时能够兼容 Zemax 及其它光学设计软件,因此成为连接结构分析与光学分析程序的理想接口工具。

2 Zernike 多项式在光学系统中的应用

Zernike 多项式是一组在单位圆上正交的多项式,可用于定量分析离焦、像散、彗差等像差类型。其正交特性使各阶像差相互独立,便于在自适应光学中实时校正畸变、优化成像质量。该多项式还广泛应用于自由曲面表征、眼科诊断(如角膜地形图)等领域,用于高精度光学面形检测与像差评估。

2.1 Zernike 多项式表示波前像差

在光学系统中,像差通常由透镜、反射镜、光学窗口等光学元件引起,会影响光束质量、聚焦能力及辐射强度分布,导致光束发散、模糊或形成不均匀光斑,从而降低系统效率与性能。波前像差按其来源可分为系统固有偏差与环境扰动畸变 2 类,其中系统固有像差根据波前曲面的空间分布特性又可细分为以下 3 种:球差、彗差和像散。

目前描述光学像差(球差、彗差、像散)的方法主要有 3 种:几何光学描述法、波动光学描述法和 Zernike 多项式描述法。不同方法各有优劣,如表 2 所示。可以看出,Zernike 多项式在单位圆域内正交,保证了展开系数的唯一性,降低了计算复杂度与误差,但高阶描述误差较大。

表 2 不同光学像差描述方式优劣性对比

描述方法	优点	缺点
几何光学	简单直观,无需复杂计算	描述高阶像差时误差较大
波动光学	能够精确描述波前像差	计算难度大,概念抽象
Zernike 多项式	适用于圆形或者环形孔径,具有正交性	高阶项对局部像差描述误差较大

将光学系统中的波前像差有效分解为一组 Zernike 多项式基矢,能够准确描述各类像差,精确量化各阶像差对系统性能的影响,进而根据具体像差类型采取针对性补偿措施,使光学系统保持良好性能。各多项式对应的 Zernike 表达式如表 3~表 5 所示^[2]。其中, n 为径向多项式的阶次, m 为方位角频率, n 和 m 均为非负整数,且满足 $n-m \geq 0$ 以及 $n-m$ 为偶数; j 为从 1 开始排序的模式数, ρ 为径向坐标, θ 为极坐标中的角度分量, x 、 y 分别为波前平面上的横向坐标、纵向坐

表3 球差 Zernike 表达式

j	n	m	$Z_j(\rho, \theta)$ 表达式	像差
4	2	0	$\sqrt{3}(2\rho^2 - 1)$	离焦
11	4	0	$\sqrt{5}(6\rho^4 - 6\rho^2 + 1)$	初阶球差
22	6	0	$\sqrt{7}(20\rho^6 - 30\rho^4 + 12\rho^2 - 1)$	二阶球差
37	8	0	$3(70\rho^8 - 140\rho^6 + 90\rho^4 - 20\rho^2 + 1)$	三阶球差

表4 慧差 Zernike 表达式

j	n	m	$Z_j(\rho, \theta)$ 表达式	像差
7	3	1	$\sqrt{8}y(3\rho^3 - 2\rho)\sin\theta$	初阶y慧差
8	3	1	$\sqrt{8}y(3\rho^3 - 2\rho)\cos\theta$	初阶x慧差
16	5	1	$\sqrt{12}(10\rho^5 - 12\rho^3 + 3\rho)\cos\theta$	二阶x慧差
17	5	1	$\sqrt{12}(10\rho^5 - 12\rho^3 + 3\rho)\sin\theta$	二阶y慧差

表5 像散 Zernike 表达式

j	n	m	$Z_j(\rho, \theta)$ 表达式	像差
5	2	2	$\sqrt{6}\rho^2\sin(2\theta)$	45°一阶像散
6	2	2	$\sqrt{6}\rho^2\cos(2\theta)$	0°一阶像散
12	4	2	$\sqrt{10}(4\rho^4 - 3\rho^2)\cos(2\theta)$	0°二阶像散
13	4	2	$\sqrt{10}(4\rho^4 - 3\rho^2)\sin(2\theta)$	45°二阶像散

标。Zernike 多项式由特定的阶数 n 和方位角频率 m 共同确定^[3]。

表3中,球差主要由轴上物点发出的光束从不同入射点穿过球面透镜引起。此时,透镜边缘光线与近轴光线聚焦点不重合,分布于光轴不同位置,在像面上形成圆形弥散斑。球差仅与径向坐标 ρ 相关,属于轴对称像差,会导致中心视场和边缘视场的成像质量下降。

表4中,彗差是由于轴外物点发出的锥形光束经光学系统后,无法在理想像面完美成像所致。通常表现为偏离光轴的光线(尤其是远轴光线)聚焦位置不一致,形成类似彗星状带尾光斑。彗差会严重影响大视场、大孔径系统的边缘成像质量。

表5中,像散是因光束经光学元件后产生方向性分离所致。主光线在系统中传播时,其横向与纵向分量在光轴不同位置分别聚焦,形成子午焦线和弧矢焦线,造成子午与弧矢方向的光斑直径不一致。尽管每

个物点可获得清晰像点,但整个像面不处于同一平面,而是位于一回转曲面,导致图像在不同方向上的清晰度不均。

2.2 Zernike 多项式进行波面拟合

在光学系统分析中,波面拟合通过选取一组相互独立的基函数来逼近离散的波前像差数据。该方法旨在利用连续函数表征光学系统的波前误差分布。Zernike 多项式因其在单位圆上的正交性和旋转对称性,成为工程实践中广泛采用的基函数。

为尽可能减少负面因素对拟合精度的影响,确保结果的准确性,采用 Zernike 多项式进行波面拟合时应遵循以下原则^[1]:

1)在干涉波面拟合过程中,适当增加采样点数量并优化 Zernike 多项式的阶次选择,能够有效提升拟合精度,在保持各阶系数独立性的同时增强拟合稳定性。

2)在采样点数量固定的情况下,增加 Zernike 模式阶次可以提高波面拟合精度,但需满足模式阶数不超过干涉条纹总数的约束条件。

3)采样密度并非决定拟合效果的唯一关键因素。在有限采样条件下,通过合理配置 Zernike 多项式阶次,仍可实现高精度的波面解析;而过量的采样数据可能因噪声累积,反而降低重构算法的稳定性。

4)当 Zernike 模式阶次与干涉条纹数量相当时,虽能维持较高的相位重构准确度,但面形误差可能呈现畸变。此时,基于 Zernike 展开的波面评估方法会面临模式混叠效应,导致面形检测的置信度降低。

5)在干涉测量中,若 Zernike 模式阶次超过光瞳区域条纹密度的阈值,将引发相位重构波动并导致面形评估偏差。因此,在波前解析算法中,需使模式阶次与实际条纹特征相匹配,Zernike 展开阶次不应超过实际条纹数。

利用 Zernike 多项式高效地拟合光学系统的波前误差并分析像差分布,再将其与最小二乘拟合、正则化方法等优化算法相结合,可显著提升波面拟合的精度和稳定性。

近年来,相关研究取得了诸多进展:赵齐等人^[4]提出了一种构造非圆域 Zernike 正交基底函数的新方法,解决了非圆域波面拟合中 Zernike 多项式失去正交性及拟合系数交叉耦合的问题;张艺蓝等人^[5]利用琼斯表示法,研究了基于条纹 Zernike 多项式的离轴自由曲面光学系统偏振像差解析方法,通过建立反射式自由曲面光学架构的偏振像差数学模型,重点分析了低

阶系数项对离轴视场偏振像差空间分布的影响;赖欣等人^[6]提出了一种基于 Zernike 多项式拟合的自适应包裹卡尔曼滤波相位解缠算法,用于分析波前像差,该算法无需依据干涉图调整不同观测噪声,而是利用预测值和量测值自适应地调整量测噪声协方差矩阵;KIM Y^[7]针对硬件不完善的问题,基于 Zernike 多项式展开的像差分析技术,通过物面扫描定位最佳焦平面后,将聚焦光强分布数据映射为多项式系数空间,有效分离并量化了光学系统中的各类像差成分;YANG D 等人^[8]提出了一种适用于非圆形瞳孔的模式波前重建方法,该方法利用 Schwarz-Christoffel 映射将非圆形波前共形转换为圆盘形域,使得转换后的圆形波面能够由 Zernike 圆多项式进行拟合;FU Y 等人^[9]提出了极坐标下基于 Zernike 偏导多项式的波面重建方法,通过提取前 36 项 Zernike 多项式在极坐标下的切向与径向偏导数以构建格拉姆矩阵方程,从耦合混叠的梯度数据中解耦出线性无关的 Zernike 复原系数。

2.3 大气湍流与波前重构

2.3.1 模拟大气湍流引起的波前畸变

光在大气中传播时会受到湍流影响,出现光强波动、光束漂移、扩展和角度起伏等现象,导致到达目标的光功率密度下降,从而影响强光对远程目标的作用效果。因此,研究光在湍流大气中的传输特性并进行仿真分析尤为重要。仿真分析的关键问题之一在于模拟大气湍流对光学系统的影响,特别是模拟由大气湍流引起的相位畸变,即相位屏。

对于局部均匀各向同性湍流,在高雷诺数且尺度足够小的条件下,均匀湍流的平衡状态可基于以下 3 个假设^[10]:

- 1) 各向同性假设:小尺度湍流在统计特征上呈现各方向均匀性。
- 2) 能量耗散主导的普遍性:小尺度湍流运动的统计特性由能耗率和粘性系数共同决定。
- 3) 大尺度统计独立性:大尺度湍流运动的统计特性具有由能量耗散率唯一决定的普适形式,且与动力粘度无关。

满足上述假设的理想湍流称为 Kolmogorov 湍流。Kolmogorov 湍流引起的波前畸变可通过正交化手段,在圆形区域内利用 Zernike 多项式序列进行有效分解与表达。该过程通常借助 Zernike 模式间的统计相关性,并基于 Karhunen-Loève 函数(K-L 函数)展开实现,一般流程如下^[11]:

- 1) Zernike 多项式阶次选择与协方差计算:首先根

据应用需求确定待模拟的 Zernike 模式的最高阶次,随后基于统计学原理建立对应阶次 Zernike 基函数间的协方差矩阵 C ,该矩阵用于量化各阶像差模式之间的相关性特征。

2) 协方差矩阵特征分解与谱解析:基于矩阵谱分解理论,对协方差矩阵 C 进行正交分解,得到 $C=VSV^T$ 。其中, S 为包含特征值(表征各模式能量分布)的对角矩阵, V 为由标准正交特征向量构成的酉矩阵,其列向量对应 Karhunen-Loève 展开的基函数系数。此分解过程将原始相关变量转换为统计无关的独立模态。

3) 基于协方差矩阵的系数生成:首先构造一个服从多元正态分布的随机向量 B ,其数学期望为零,协方差结构由矩阵 S 确定。随后通过线性变换 $A=VB$ 将随机向量转换至系数空间,得到的向量 A 即为满足要求的 Zernike 多项式展开系数。

在自由空间光通信系统中,基于 Zernike 多项式构建波前畸变的数学模型,能够精确重构大气湍流对光束传输路径及相位特征的扰动效应。该方法不仅有助于深入分析和解释波前畸变的成因,还能为自适应光学系统提供预补偿量值,其校正残差具有良好的误差可控性。

2.3.2 Zernike 多项式进行波前重构

光信号中的相位信息蕴含着介质的多种物理参量特征。在单色相干照明条件下,物体波前可分解为振幅与相位 2 个维度,采用复振幅表征方法可实现其完整的数学描述。然而,受限于光电探测器的物理特性,相位分量无法直接获取。波前重构技术通过相位恢复算法,建立相位梯度与光强分布的定量映射关系,完成从不可测相位到可记录光强信息的物理量转换,是提升光学成像系统性能的关键技术之一^[12]。

由于光学系统的孔径通常为圆形,本文在圆形孔径内进行分析。将波前像差函数 $\phi(x,y)$ 展开为系数 a_k 与 Zernike 多项式的线性组合^[13],利用 Shack-Hartmann 波前传感器获取的波前梯度信息建立线性代数方程,通过矩阵运算求解 Zernike 基函数的系数。具体而言,对波前像差函数分别求 x 和 y 的偏导,得到第 i 个子孔径内水平方向和垂直方向的波前相位平均斜率 G_{ix} 和 G_{iy} ^[13]。利用传感器测量到的波前斜率数据 G_{ix} 和 G_{iy} ,可建立如下线性方程:

$$G = FA \quad (1)$$

其中, G 为波前斜率向量, F 为波前重构矩阵。通过求解该线性方程,即可得到 Zernike 多项式的系数 a_k ,从而实现波前重构。

2.3.3 波前重构研究进展

研究人员采用 Zernike 多项式对大气湍流引起的波前畸变进行建模,通过分解和重构湍流波前的不同阶次畸变模式,实现对复杂湍流效应的有效描述与仿真。同时,结合 K-L 展开、统计特性分析和自适应光学算法, Zernike 多项式在高分辨率波前重构、湍流补偿与自适应光学系统设计中发挥了重要作用,显著提升了光学成像质量与信号传输稳定性。

近年来,相关研究取得了显著进展:徐晨露等人^[14]在 Zernike 模式分解的相位重构过程中,首先将波前畸变分解为多阶正交基函数的线性组合,通过量化湍流模式与各阶基函数间的互信息确定其权重分布特征,进而依据互信息排序构建优化后的重构矩阵,实现了高效的波前校正;LAVRINOV V V 等人^[15]采用 Zernike 多项式逼近波函数,基于 Hartmann 方法重建被湍流扭曲的光辐射波前,对高强度湍流下的变形进行了分析,并提出了一种减小由高强度湍流相位波动引起的残余重建误差的方法,有效降低了波前重构的均方根残差;WANG Y 等人^[16]在分析耦合光纤端面特性的基础上,采用桶内功率代替传统的耦合效率作为评价标准,首次推导了自由空间激光通信性能与自适应光学参数(修正的 Zernike 模数)之间的关系;SONG C 等人^[17]通过功率谱反演法、Zernike 多项式法和低高频组合法分别建立了湍流随机相位屏,推导了激光通过湍流大气传播到反射屏的后向散射增强效果的光强表达式和背向散射增强系数;张赐宝等人^[18]利用 Zernike 多项式作为基底函数,构建了自适应光学系统中对波前传感器残余像差约束的成像光路静态像差检测模型,并完成了对静态像差的离线测量;王涛等人^[19]通过建立任意形状区域下 Zernike 多项式的正交基转换矩阵,结合多方向差分波前信息的加权最小二乘估计方法,构建了具有几何适应性的波前重构数学模型。

2.4 光学图像亚像素边缘检测

主流的像素级边缘检测技术主要包括 3 类典型方法:插值运算、模型拟合及矩量分析。插值法通过对边缘区域像素进行插值运算来增强边缘特征的识别,该方法计算效率较高,但抗噪性能较弱。拟合法不依赖数值微分运算,具有较好的抗噪能力,但模型结构相对复杂,计算成本较高。目前,在亚像素级边缘检测研究领域,矩量分析方法凭借其综合优势已成为主流,能够在保持计算效率的同时实现抗噪性能的平衡^[20]。

在矩量分析方法中,图像矩可用于表征图像函

数,描述和识别变形物体与图案的不变特征。在统计学中,矩常用于描述随机变量的分布;若将灰度图像的像素强度视为随机变量,则可直观地利用图像矩进行图像分析。常见的图像矩类型包括几何矩和正交矩。与几何矩相比,正交矩具有逆变换简单、信息冗余度低等优势,而 Zernike 矩正是一种重要的正交矩。

亚像素检测方法利用 Zernike 矩的几何特性,首先建立标准阶跃灰度模型,再结合 Zernike 基函数的旋转不变性构建参数映射矩阵,从而实现图像边缘的亚像素级精确定位。由于 Zernike 正交基在旋转变换中模量保持恒定,仅相位角发生偏移,因此能够有效降低边缘参数计算的复杂度^[21]。

近年来,研究人员借助 Zernike 矩在亚像素边缘定位中实现了更高精度与稳定性,进一步推动了复杂场景下的高精度图像边缘分析与定位技术的发展。具体研究进展包括:杨兴宇等人^[22]针对跟踪雷达的 3 种常见欺骗干扰,提出一种基于平滑伪魏格纳-维尔分布时频图像的 Zernike 矩特征识别方法,通过提取 Zernike 矩特征捕捉图像细节,并构建特征向量进行分类识别;杨绵绒等人^[23]基于 Sobel 梯度算子进行光斑边缘的初级检测,利用 Zernike 矩空间模型对初始边缘进行亚像素级修正,结合自适应阈值判定与边缘连续性约束,构建误差补偿机制以实现光斑轮廓的亚像素级表征;李英超等人^[24]针对红外图像识别问题,以轻量级梯度提升机算法为基础,提出 Zernike 特征选取算法,并结合稀疏表示分类方法完成目标类别确认;PORTER J 等人^[25]利用 Zernike 矩对镜面变形后的面形进行边缘检测,通过仿真分析得出激光雷达接收系统优化后焦距与温度之间的线性关系;范沁红等人^[26]基于 Canny 算子实现图像的初始粗定位并保留像素级边缘轮廓,继而构建基于 Zernike 正交复函数多项式的 9×9 检测模板,推导出新型边缘检测算子,有效提升了边缘定位精度,最终引入动态自适应 Otsu 阈值选择机制,实现了亚像素级边缘的精确定位。

2.5 Zernike 多项式拟合人眼像差

在理想光学状态下,入射波前经人眼屈光系统调节后,应在视网膜黄斑区形成完美的点状聚焦。然而,实际生物光学系统中普遍存在角膜不规则性、晶状体梯度折射率偏差等解剖学特征,导致出射波前产生非对称畸变,偏离标准球面波的传播规律。

Zernike 多项式可用于拟合人眼波前像差的核心,在于建立 Zernike 基函数与波前传感器测得的波前斜率之间的数学关系。通过求解 Zernike 多项式的系数,

即可获得完整的波前像差解析表达式。

在眼科光学中,Zernike多项式被广泛用于描述和分析人眼波前像差。通过测量眼球的波前误差并拟合其Zernike系数,眼科医生能够量化个体的高阶像差分布,进而优化屈光手术方案、实现视力缺陷的个性化矫正,最终提升患者的视觉质量。

近年来,该领域的研究不断深入:FAZEKAS Z等人^[26]为有效抑制角膜地形图测量中的系统性误差,提出了一类新型正交函数体系——有理Zernike函数。该函数通过Blaschke函数参数变换从经典Zernike多项式导出,在保持正交性的同时,具备更优的局部特征解析能力。HU C等人^[27]通过分析不同Zernike像差组合,量化了正向垂直彗差与其它二至五阶Zernike像差项的视觉交互效应。研究发现,当正向垂直彗差 Z_3^{-1} 与 Z_3^{-3} 、 Z_4^{-4} 、 Z_5^{-5} 、 Z_5^{-3} 、 Z_5^{-1} 结合使用时,比单独使用 Z_3^{-1} 能带来更好的视觉图像质量。KHORIN P A等人^[28]利用像差仪获取的数据,计算了健康眼角膜前表面、后表面以及近视角膜的Zernike多项式系数的平均值。实验分析表明,改善视觉质量需要重点考虑角膜前三阶或四阶等高阶像差。MECHÓ-GARCÍA M等人^[29]通过计算眼内重复性标准差(Sw)、重复性系数(CR)、变异系数(CV)及组内相关系数(ICC)4项指标,系统评估了四阶及以下Zernike系数在调节过程中的可重复性。结果表明,这些阶次的Zernike系数均展现出良好的测量一致性。

3 结束语

本文系统梳理了Zernike多项式在光学领域中的主要应用,涵盖波前像差表征、大气湍流与波前重构及光学图像亚像素边缘检测等方面。尽管Zernike多项式具备诸多优势,但随着应用条件日趋严苛与分析过程复杂性不断提高,其在实际应用中面临若干挑战,主要表现在:

1)在高精度光束传输或聚焦过程中,常出现高次球差、三阶像散等高阶像差。此类高阶像差引起的波前变形通常比低阶像差更为复杂,其影响更难预测与控制。尤其在长距离传输或多轮光学反射、折射场景下,波前畸变往往呈现高度复杂性。虽然Zernike多项式能有效分解低阶像差,但在高阶像差的精确表示与计算方面仍存在困难。

2)在自适应光学与波前传感器的实时反馈控制中,Zernike多项式的计算复杂度可能成为系统瓶颈。随着多项式阶数提高,其计算量呈指数级增长,这给

高阶像差的实时分解与校正带来显著挑战。

基于上述问题,结合科学技术发展趋势,本文提出以下值得深入研究的未来方向:

1)应着力提升Zernike多项式对高阶像差及复杂波前畸变的校正能力。可探索结合机器学习与人工智能技术,构建能够实时识别并修正高阶像差的自动化校正系统。同时,面向超高精度激光加工、超高分辨率成像等特定应用场景,开发新型Zernike多项式基函数,以实现更精确的波前重构与像差修正。

2)随着自适应光学技术的持续发展,Zernike多项式在动态波前校正系统中的应用将不断深化。特别是在大气湍流动态干扰环境下的激光传输系统中,Zernike多项式有望为实时波前畸变校正提供核心支持,保障光束传输质量。为此,可进一步研究将Zernike多项式与高速波前传感器、高效计算算法相结合的方法,实现更快速、更精确的实时波前校正。

参考文献:

- [1] 莫卫东. Zernike多项式拟合干涉波面的基本原则[J]. 空军工程大学学报(自然科学版),2002(3):35-38.
- [2] 胡绍云,李黎明,周国家,等. 激光测角装置光学系统设计与验证[J]. 激光杂志,2023,44(12):23-28.
- [3] NIU K, TIAN C. Zernike polynomials and their applications[J]. Journal of Optics, 2022, 24(12): 123001-1-123001-55.
- [4] 赵齐,王允,王平,等. 波面重构中非圆域Zernike正交基底构造方法[J]. 光学技术,2017,43(3):228-233.
- [5] 张艺蓝,史浩东,王超,等. 基于自由曲面的空间光学系统偏振像差分析[J]. 光学精密工程,2021,29(12):2783-2796.
- [6] 赖欣,贾英杰. 基于Zernike多项式的自适应包裹卡尔曼相位解缠[J]. 电子测量与仪器学报,2023,37(11):197-204.
- [7] KIM Y, SOHN T N, SEO C S, et al. Quantifying aberrations on object plane using Zernike polynomials[J]. Current Optics and Photonics, 2024, 8(2): 151-155.
- [8] YANG D, YANG Z, ZHANG Y. Modal wavefront reconstruction by Schwarz-Christoffel mapping and Zernike circle polynomials for noncircular pupils[J]. Optics and Lasers in Engineering, 2025, 184: 108643-1-108643-12.
- [9] FU Y, LIAO W, JIANG G, et al. A novel phase measuring deflectometry based on polar coordinate[J]. Optics & Laser Technology, 2025, 181: 111580-1-111580-9.
- [10] 李征,廖志文,梁静远,等. 大气湍流模型与大气信道模型的研究与展望[J]. 光通信技术, 2023,47(3):9-17.
- [11] 胡谋法. 受大气湍流影响的光学波前模拟方法研究[J]. 光学与光电技术,2003,1(5):10-12.
- [12] 魏金文,李儒佳,吴佳琛,等. 相位恢复波前重构技术的发展与应用(特邀)[J]. 激光与光电子学进展,2024,61(2):21-37.
- [13] 张强,吕百达,姜文汉. 环形区域上Zernike模式法波前重构[J]. 强

激光与粒子束,2000(3):306-310.

[14] 徐晨露,郝士琦,王勇,等. 基于模式互信息的大气湍流畸变波前重构[J]. 空军工程大学学报(自然科学版),2020,21(2):65-70.

[15] LAVRINOV V V, LAVRINOVA L N. Numerical analysis of wave-front reconstruction under conditions of high-intensity atmospheric turbulence [J]. Atmospheric and Oceanic Optics, 2020, 33(4): 332-339.

[16] WANG Y, JIN C, WANG R, et al. Zernike mode analysis of an adaptive optics system for horizontal free-space laser communication[J]. Journal of Optics, 2021, 23(10): 105701-1-105701-9.

[17] SONG C, LI S, GAO Y, et al. The enhancement effect of backscattering for laser propagation through turbulent atmosphere[C]//SPIE. Proceedings of Ninth Symposium on Novel Photoelectronic Detection Technology and Applications. New York: Curran Associates Publications, 2023: 967-983.

[18] 张赐宝,钟立波,饶长辉. 基于波前传感器残差约束的成像光路静态像差检测方法[J]. 激光与光电子学进展,2024,61(14):111-123.

[19] 王涛,韩玺廷,李艳秋,等. 利用多方向差分 Zernike 多项式拟合的任意孔径波前重构[J]. 光学学报,2025,45(7):213-226.

[20] 范沁红,张庭瑞,马自勇,等. 一种改进的 Zernike 矩亚像素边缘检测算法[J]. 计算机仿真,2025,42(1):172-177,312.

[21] 刘悦,朱均超. 基于改进 Zernike 矩的光斑图像亚像素边缘检测算法[J]. 激光杂志,2021,42(5):32-35.

[22] 杨兴宇,阮怀林. 基于时频图像 Zernike 矩特征的欺骗干扰识别[J].

现代雷达,2018,40(2):91-95.

[23] 杨棉绒,牛丽平. 基于 LGBM 的 Zernike 特征选取及红外图像目标识别方法[J]. 红外与激光工程,2022,51(4):415-420.

[24] 李英超,张庆,刘壮,等. 临近空间激光雷达自调焦接收系统设计[J]. 红外与激光工程,2024,53(4):136-145.

[25] PORTER J, GUIRAO A, COX I G, et al. Monochromatic aberrations of the human eye in a large population[J]. JOSA A, 2001, 18(8): 1793-1803.

[26] FAZEKAS Z, LÓCSI L, SOUMELIDIS A, et al. Rational Zernike functions capture the rotations of the eye-ball[C]//ECMI. Proceedings of progress in Industrial Mathematics at ECMI 2018. Cham: ECMI, 2019(2): 215-221.

[27] HU C, RAVIKUMAR A, HASTINGS G D, et al. Visual interaction of 2nd to 5th order Zernike aberration terms with vertical coma[J]. Ophthalmic and Physiological Optics, 2020, 40(5): 669-679.

[28] KHORIN P A, KHONINA S N. Simulation of the human myopic eye cornea compensation based on the analysis of aberrometric data[J]. Vision, 2023, 7(1): 21-38.

[29] MECHÓ-GARCÍA M, ARCAS-CARBONEL M, ORDUNA-HOSPITAL E, et al. The influence of accommodative demand on ocular aberrations: a study of zernike coefficients repeatability and variability[J]. Current Eye Research, 2024, 49(12): 1237-1246.