

Zernike 多项式波前畸变校正研究进展

梁静远¹, 张馨文¹, 柯程虎², 柯熙政^{1,3*}(1. 西安理工大学 自动化与信息工程学院, 西安 710048; 2. 西安文理学院 信息工程学院, 西安 710048;
3. 陕西省智能协同网络军民共建重点实验室, 西安 710048)

摘要:光波在大气中传输时,受湍流影响,会产生不同程度的波前畸变。自适应光学系统通过相位共轭原理将畸变波前恢复成接近理想光的状态,从而实现波前畸变校正。Zernike 多项式在圆域展开的低阶模式与 Seidel 像差一致,通过特定的算法产生共轭相位,可实现波前畸变的有效校正。系统阐述了 Zernike 多项式理论及波前探测/无波前探测两类自适应光学系统,详细分析了基于 Zernike 多项式的 8 种波前畸变校正算法工作原理,并指出了各种算法的校正效果和优缺点。

关键词:波前校正;波前畸变;Zernike 多项式;自适应光学系统

中图分类号:TN929.1 **文献标志码:**A **文章编号:**1002-5561(2025)02-0049-08

DOI:10.13921/j.cnki.issn1002-5561.2025.02.010

开放科学(资源服务)标识码(OSID):

Research progress on wavefront
aberration correction using Zernike polynomialsLIANG Jingyuan¹, ZHANG Xinwen¹, KE Chenghu², KE Xizheng^{1,3*}

(1. Faculty of Automation and Information Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China;

2. School of Information Engineering, Xi'an University, Xi'an 710048, China;

3. Shaanxi Civil-Military Integration Key Laboratory of Intelligence Collaborative Networks, Xi'an 710048, China)

Abstract: When light waves propagate through the atmosphere, they experience varying degrees of wavefront aberration due to turbulence. Adaptive optical systems restore the distorted wavefront to a state close to the ideal light through the principle of phase conjugation, thereby achieving wavefront aberration correction. The low-order modes of Zernike polynomials expanded in a circular domain align with Seidel aberrations, and by generating conjugate phases through specific algorithms, effective wavefront aberration correction can be achieved. This paper systematically elaborates on the theory of Zernike polynomials and two types of adaptive optics systems—wavefront-sensing and wavefront-sensorless approaches. It provides a detailed analysis of the working principles of eight Zernike polynomial-based wavefront aberration correction algorithms and evaluates their correction performance, advantages, and limitations.

Key words: wavefront correction, wavefront aberration, Zernike polynomials, adaptive optical system

0 引言

波前是指在光传播过程中,由相同相位点集合形成的面,通常也被称为波面或等相位面。在理想条件下,波前可以表现为平面波或球面波。然而,在实际传

收稿日期:2024-10-14。

基金项目:国家自然科学基金项目(61377080)资助;陕西省重点产业创新项目(2017ZDCXL-GY-06-01)资助。

作者简介:梁静远(1989—),女,陕西人,西安理工大学自动化与信息工程学院助理工程师,主要研究方向为无线光通信。

***通信作者:**柯熙政(1962—),男,陕西人,西安理工大学教授,理学博士,中国电子学会会士,俄罗斯自然科学院外籍院士,主要研究方向为无线光通信。



输中,由于介质折射率分布不均匀或其它外部因素的影响,波前可能发生形变,与理想状态产生偏差,这种现象被称为波前畸变。波前畸变校正技术通过调整光程或改变传播介质的折射率,修正光束的波前相位分布,从而实现畸变补偿。与其它模式法^[1-2]相比,基于 Zernike 多项式的模式重建方法^[3](简称 Zernike 模式法)具有以下优势:其一,Zernike 多项式能精确描述圆形光学孔径的波前畸变;其二,其极坐标体系与 Seidel 像差理论具有天然的对对应性;其三,各阶多项式间的正交性可独立表征波前误差分量;其四,该方法在波前重建中表现出较高的精确性。这些特性使 Zernike 多项式广泛应用于光学系统设计与优化。

梁静远,张馨文,柯程虎,等: Zernike 多项式波前畸变校正研究进展

本文在阐述 Zernike 多项式及 2 类自适应光学系统(有波前探测/无波前探测)的基础上,系统总结基于 Zernike 多项式的 8 种波前校正算法原理,并对比分析了各算法的校正效果与优缺点。

1 国内外研究进展

1.1 国外研究现状进展

1.1.1 早期理论

自适应光学系统的概念最早由 BABCOCK H W^[4]于 1953 年提出,旨在通过相位补偿机制校正大气湍流引起的波前畸变。这一理念为后续研究奠定了基础,并展现出极高的灵活性和环境适应性。1976 年, NOLL R J^[3]首次将 Zernike 多项式引入波前描述,开创性地提出了基于 Kolmogorov 湍流谱的波前模拟方法,为后续波前重构奠定了理论基础。FRIED D L^[5]在 1977 年首次将自适应光学应用于无线光通信领域,标志着该技术从理论迈向实际应用。HARDY J W^[6]于 1978 年对自适应光学系统的算法和技术进行全面总结,正式确立了其作为独立研究方向的地位。

1.1.2 关键技术的发展与优化

1)波前描述与重构。Zernike 多项式在波前描述中的核心作用贯穿整个发展历程。RODDIER N A^[7]进一步验证了其在波前像差展开中的高效性,并提出随机加权 Karhunen-Loeve 函数展开的新方法,提升了波前模拟精度。DANIE M H 等人^[8]验证了 Zernike 多项式的正交性质,巩固了其在波前重构中的地位。UPTON R 等人^[9]通过 Gram-Schmidt 正交化技术,将 Zernike 多项式扩展至任意形状孔径,显著增强了其通用性和适用性。MAHAJAN V N 等人^[10]则针对环形波前提出改进分析方法,拓宽了波前相位的研究范围。

2)硬件与算法协同优化。自适应光学系统的性能依赖于硬件与算法的协同发展。OYA S 等人^[11]开发的双晶体压电陶瓷变形镜显著提升了校正能力,而 SEIFERT L 等人^[12]通过改进夏克-哈特曼传感器算法,提高了波前斜率测量精度。HEMMATI H 等人^[13]结合变形镜和像差补偿算法,实现了波前均方根值的大幅降低(从 1.4λ 降至 0.05λ),斯特列尔比提升至 89%。此外, DUNCAN T S 等人^[14]通过可编程门阵列处理器降低系统延时,构建了低时延的自适应光学系统。

1.1.3 应用领域的拓展

1)天文观测。自适应光学在天文领域的应用始于德法联合小组开发的 COME-ON 系统,成功校正了红外波段的波前畸变^[15]。此后,该技术被广泛应用于各类

望远镜中,显著提升了观测分辨率和精度。

2)自由空间光通信。WILKS S C 等人^[16]首次将自适应光学用于自由空间激光通信建模,证明了对光纤耦合效率的显著改善。PASUPATHI T 等人^[17]基于随机并行梯度下降算法和神经网络,实现了长距离自由空间光通信的高精度校正。

3)生物医学成像。BOOTH M J 等人^[18]将自适应光学引入生物医学 3D 成像领域,极大地提高了细胞、组织和活体成像的分辨率,成为医学研究的重要工具。

4)海洋与大气环境校正。TOSELLI I 等人^[19]研究了自适应光学在海洋环境中校正高斯光束的能力,发现仅校正低阶模式即可显著改善波前质量。RUKOSUEV A 等人^[20]通过双晶片变形镜和可编程门阵列技术,实现了实验室湍流畸变的实时校正。

1.1.4 近期技术创新与展望

近年来,无波前自适应光学系统逐渐兴起。SHIKHOVTSEV A Y 等人^[21]基于面向层和面向对象的方法,开发了宽视场自适应光学系统,用于地面-太阳望远镜的畸变校正。JEON H 等人^[22]提出了一种无需先验物理参数的非线性面内畸变校正算法,为显微镜技术的图像失真校正提供了新思路。

1.2 国内研究现状进展

我国自适应光学技术的研究始于 1988 年,姜文汉^[23]首次搭建了一套基于 21 单元变形镜和横向剪切干涉仪的系统,实现了对动态波前畸变的校正,奠定了该领域发展的基础。随后,姜文汉等人^[24]于 1995 年进一步开发了我国首套红外自适应光学系统,采用 37 单元变形镜和夏克-哈特曼波前传感器,并结合模式法与直接斜率法 2 种算法,成功校正不同强度的大气湍流。在此基础上,严海星等人^[25]通过数值模拟深入分析了该系统的性能影响因素,验证了直接斜率算法的有效性。同时,官保柱等人^[26]首次将自适应光学技术应用于星载光学系统,开创了其在地对地观测中的应用先河。

进入 21 世纪后,研究重点逐渐转向高精度波前重构与控制算法的优化。罗智锋等人^[27]探讨了 Zernike 模式法在高功率激光束波前重构中的应用,证明其对中频段波前的精确恢复能力。杨平等人^[28]则提出将遗传算法与 Zernike 模式法结合,显著提高了收敛速度和校正效果。同年,杨慧珍等人^[29-30]分别开发了基于随机并行梯度下降算法的无波前自适应光学系统,并研究了少单元变形镜的高效校正策略,大幅提升了斯特列尔比和光强峰值。此后,研究逐步向多算法融合与复杂场景应用方向发展。HUANG L H 等人^[31]提出了几

何光学近似算法,为无波前自适应光学系统提供了新思路。王卫兵等人^[33]继续优化遗传算法,验证了其作为逼近控制算法的潜力。许泽帅等人^[34]则改进了变形镜驱动电压计算方法,简化了系统设计。

随着硬件性能的提升,研究规模不断扩大。杨慧珍等人^[35]和王志强等人^[36]分别使用 61 单元和 127 单元变形镜,深入研究了几何光学近似算法的收敛特性及其在不同湍流条件下的表现。吴加丽等人^[37]进一步验证了随机并行梯度下降算法在校正自由空间光通信中的优越性,使斯特列尔比达到 0.81。

近年来,研究更加注重实际应用与算法对比分析。谭振坤等人^[38]成功将自适应光学技术应用于相干光通信,实现波前峰谷值小于 $0.8\text{ }\mu\text{m}$ 、均方根小于 $0.05\text{ }\mu\text{m}$ 的校正效果。罗琳等人^[39]系统总结了 3 种主流波前处理算法的特点及适用范围,为后续研究提供了理论指导。梁殿明等人^[40]针对椭圆形窗口光学系统提出了改进的遗传算法,显著提升了优化效率。此外,张丹玉^[41]和王凯迪^[42]分别从自由空间相干光通信和控制算法优化的角度,对比分析了多种波前校正方法的性能差异。梁静远等人^[43]则对模式法进行了全面总结,强调了 Zernike 多项式在圆域波前校正中的广泛应用。最新研究中,杨尚君^[44]提出结合快速反射镜与变形镜的双校正方案,有效解决了非共光路像差问题,显著提高了耦合效率。

综上所述,我国在自适应光学领域的研究已取得显著进展,不仅深入探索了 Zernike 多项式的性质,还提出了多种改进算法以提高波前重构精度和速度。这些成果广泛应用于天文观测、激光通信等领域,为相关行业的科技进步奠定了坚实基础。

2 自适应光学系统和 Zernike 多项式

自适应光学系统的核心目标是通过实时监测和校正波前畸变,提高成像质量和光束传输效率。系统首先通过波前传感器测量入射光波前的畸变信息,随后利用控制器对波前相位进行分析和重构,并生成相应的驱动信号,驱动波前校正器(如变形镜)改变表面形态,形成与畸变波前共轭(相位相反)的面型。最终,通过叠加抵消原理实现波前校正。

2.1 有波前自适应光学系统^[45]

有波前自适应光学系统由波前传感器、波前控制器和波前校正器三部分组成。在实际应用中,激光源发出的光束经过扩束和准直后传输至大气中,受湍流影响产生波前畸变。接收终端通过分光棱镜将光束分

为 2 路:一路耦合进入单模光纤,另一路经透镜聚焦到波前传感器。波前传感器持续监测光束波前信息,并将其转化为电信号传递给波前控制器。波前控制器通过特定算法重构波前相位,计算出变形镜所需的驱动电压,并施加到波前校正器上完成校正。该系统具有高精度和实时性强的特点,适用于动态环境或对校正精度要求较高的场景。然而,有波前自适应光学系统也存在一些局限性。由于波前传感器的存在,系统结构复杂且成本较高,同时可能存在非共路像差问题,导致光能利用率较低。

2.2 无波前自适应光学系统^[45]

无波前自适应光学系统主要由波前处理器、波前校正器和成像探测器(如电荷耦合器件)组成。与有波前系统不同,无波前自适应光学系统不依赖波前传感器,而是通过实时评估成像光斑质量函数(如斯特列尔比)作为优化指标,利用特定算法和迭代过程计算补偿畸变所需的控制电压。成像探测器直接捕获光斑图,避免了过多分光导致的探测失效问题,使信息采集更加便捷。此外,无波前自适应光学系统不存在非共路像差问题,光能利用率更高,系统结构相对简单,成本较低。然而,无波前自适应光学系统的调节时间较长,难以实现实时校正,校正带宽不足,因此更适合对实时性要求不高或静态环境的应用场景。

2.3 Zernike 多项式

根据 Kolmogorov 湍流理论,相位屏被广泛用于模拟大气湍流引起的波前畸变^[4]。其中,NOLL R J^[3]提出的基于 Zernike 多项式的波前模拟方法已成为标准技术方案;当波前分布在圆形孔径内时,通过 Zernike 多项式的 Karhunen-Loève 展开可实现湍流波前的精确数学表征。波前相位可表示为

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{j=1}^q a_j Z_j(r, \theta) = \begin{cases} \sum_{j=1}^q a_j \sqrt{n+1} R_n^m(r) \sqrt{2} \cos(m\theta), m \neq 0 \text{ 且 } j \text{ 为偶数} \\ \sum_{j=1}^q a_j \sqrt{n+1} R_n^m(r) \sqrt{2} \sin(m\theta), m \neq 0 \text{ 且 } j \text{ 为奇数} \\ \sum_{j=1}^q a_j \sqrt{n+1} R_n^m(r), m=0 \end{cases} \quad (1)$$

其中, q 为 Zernike 多项式的最高阶数, a_j 和 $Z_j(r, \theta)$ 分别为第 j 个 Zernike 系数和多项式; m 为角向级次, n 为径向级次, m, n 为含零正整数, $n-m \geq 0$ 且为偶数; (r, θ) 为单位圆内的极坐标, $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$,而

梁静远,张馨文,柯程虎,等: Zernike 多项式波前畸变校正研究进展

$R_n^m(r)$ 的表达式如式(2)所示。

$$R_n^m(r) = \sum_{s=0}^{\frac{n-m}{2}} \frac{(-1)^s (n-s)!}{s! \left(\frac{n+m}{2}-s\right)! \left(\frac{n-m}{2}-s\right)!} r^{n-2s} \quad (2)$$

其中, s 为循环变量。

3 Zernike 多项式波前畸变校正算法

自适应光学系统的核心要素包括波前重构算法、实时控制方法和校正精度表征。根据实现方式的不同,自适应光学系统可分为3种:基于波前探测的系统、基于模型的无波前探测系统,以及无模型的波前探测系统。本文将详细介绍这8种光学系统中基于 Zernike 多项式的波前畸变校正算法、步骤及其优缺点。

3.1 Zernike 模式法

Zernike 模式法是一种适用于有模型的无波前自适应光学系统的校正算法。该方法通过 Zernike 多项式描述波前,并利用波前传感器探测的子孔径数据与系统响应矩阵,计算出 Zernike 系数以重构波前相位。随后,将这些系数转化为驱动电压,施加到变形镜上生成共轭相位,从而实现波前畸变的校正。

3.1.1 波前传感器测量

波前传感器采用一阶矩估计方法探测光斑质心位置。在夏克-哈特曼波前传感器中,每个子孔径的光场状态可表示为 $E_p(x_0, y_0)$, p 表示子孔径个数。透镜后的光场分布 $U_p(x_0, y_0)$ 是 $E_p(x_0, y_0)$ 与理想质心位置相位因子的乘积。通过分析焦平面的光场分布 $U_p(x, y)$, 可以独立测定每个光斑在 x 和 y 轴方向上的偏移量。当焦距足够大时,斜率计算遵循菲涅尔衍射理论,最终得到各子孔径的光斑质心位置,如式(3)所示。

$$\left\{ \begin{array}{l} x_p = \frac{\int \int x |U_p(x, y)|^2 dx dy}{\int \int |U_p(x, y)|^2 dx dy} \\ y_p = \frac{\int \int y |U_p(x, y)|^2 dx dy}{\int \int |U_p(x, y)|^2 dx dy} \end{array} \right. \quad (3)$$

其中, s_p 对应第 p 个子孔径成像区域的面积。配合特定的波前重构算法,即可解析出畸变相位信息。

3.1.2 波前重构

波前重构是依据已知的波前斜率信息,通过一系

列计算逆向推导并恢复出原本畸变的波前。具体的算法有区域法和模式法等。对于圆形孔径的波前检测,通常采用基于 Zernike 多项式的模式法;而对于方形或不规则孔径的波前分析,则需采用区域法进行处理。区域法原理简单、表达简洁,但对计算速度要求较高。模式法运算量小,像差的物理意义明确,还可通过阶数来控制重构的精度和速度^[46]。第 p 个子孔径施加单位电压时, x 轴和 y 轴所获得的斜率矩阵 S 为

$$S = l_w A \quad (4)$$

其中, l_w 为 Zernike 多项式偏导数的矩阵,该矩阵表示 Zernike 系数与斜率的关系; A 为波前重构的 Zernike 系数矩阵。将结果代入式(2)即可恢复入射光,重构出波前的畸变相位。

3.1.3 计算驱动电压

在成功重构波前之后,可通过向变形镜驱动器提供精确的电压,促使变形镜生成与畸变波前共轭的面型。该面型可直接抵消畸变影响,从而实现对波前畸变的校正。在忽略变形镜惯性延迟和非线性特性的前提下,面型 $h(x, y)$ 可用 p 项镜面影响函数 $R_p(x, y)$ 的加权和表示,加权系数为驱动电压 u_p ^[39]。其中, $R_p(x, y)$ 可以用 q 阶 Zernike 多项式展开,第 j 项系数为 b_{jp} 。按照变形镜的工作机理, Zernike 多项式系数 $u_p b_{jp}$ 化简为矩阵形式如式(5)所示。

$$\frac{1}{2} A = B U \quad (5)$$

其中, B 为 $R_p(x, y)$ 的 Zernike 展开系数矩阵, U 为变形镜的驱动电压矩阵。将驱动电压加载到驱动器上,使变形镜产生共轭相位,依据相位共轭原理,进而达到校正畸变的目的。

鉴于 Zernike 多项式在单位圆内具有正交性且能精准描述波前的特性, Zernike 模式法仅通过控制系数就能得到不同的面型,在自适应光学系统校正领域得到了广泛应用。利用 Zernike 多项式替代波前相位或斜率模拟波面,能显著减轻数据存储与计算负担。但该方法存在明显局限:当数据出现大范围波动时,无法识别出波前检测中的扰动信息。

3.2 Zernike 模式的几何光学近似算法

Zernike 模式的几何光学近似算法是一种有模型的无波前自适应光学系统校正算法。该算法利用几何光学原理近似描述波前畸变^[31]。

波前梯度平方均值的可逆积分矩阵 S_a 表示为第 m 阶与第 n 阶多项式 $Z(x, y)$ 在 x 方向梯度乘积与 y 方向梯度乘积和的二重积分, $m, n \in \{1, 2, \dots, q\}$ 为整数阶数。波前重构的 Zernike 系数矩阵 A 近似表达为

$$A = \frac{S_a^{-1} (C_0 M - \alpha^2 \text{tr}(S_a))}{2\alpha} \quad (6)$$

其中, α 为每次迭代时依次施加扰动系数, C_0 为斜率因子, $\text{tr}(\cdot)$ 为矩阵的迹。假设变形镜的影响函数为 $F_p(x, y)$, 则波前相位 $\psi(x, y)$ 可用 p 项 $F_p(x, y)$ 的加权和表示, 加权系数为驱动电压 v_{p0} 。对于每一个采样点, 可建立待校正像差 $\varphi(x, y)$ 与 $\psi(x, y)$ 的线性方程组, 通过求最小二乘解, 并结合式(6), 可以得到每次迭代的变形镜驱动电压矩阵^[36]

$$U = (AN)F^{-1} = \frac{S_a^{-1} (C_0 M - \alpha^2 \text{tr}(S_a))NF^{-1}}{2\alpha} \quad (7)$$

其中, N 为 Zernike 模式在采样点的值, F 为影响函数矩阵, M 为修正探测信号构成的矩阵。

与其它算法相比, 几何光学近似算法计算量小、校正时间短、不依赖特定类型基函数等优点, 省去了预先校正系统像差的步骤, 实施过程简单且易于理解, 无需硬件支持。然而, 由于该算法为近似算法, 其适用范围受限于几何光学近似条件, 校正精度存在理论局限。

3.3 Zernike 模式的 Martin J. Booth 算法

Zernike 模式的 Martin J. Booth 算法属于经典的有模型的无波前传感器自适应光学系统的控制算法之一, 也是 Zernike 模式的优化算法之一。该算法首先构建数学模型, 将光斑信息转换为数学公式。通过波前二阶矩与远场光强之间的线性关系, 寻求最佳系数值, 从而解析出共轭波前, 最终实现校正的目的。在接收端, 探测器的能量信号 E 可表示为由波前 $\varphi(r, \theta)$ 减去施加电压后的波前 $\Psi(r, \theta)$ 组成的相位因子在整个极坐标区域内进行积分的模的平方。成像光斑斯特列尔比 $e(c)$ 可近似表示为

$$e(c) \approx 1 - |c|^2 \quad (8)$$

其中, $|c|^2$ 为校正后的波前方差。选取若干个波前校正量, 使其 Zernike 系数都满足 $|c|^2 < \varepsilon$ 条件 (ε 为一个趋近于零的极小正数), 并获取成像光斑斯特列尔比数值, 然后通过质心计算得到最大 $e(c)$ 值对应的波前相位校正量, 即可实现畸变的校正^[47]。

因此, Martin J. Booth 算法具有更快的收敛速度和高精度的校正效果, 能够同时校正偏振和相位像差。但要求待校正的畸变具有时不变特性, 仅适应于少迭代次数就能有效校正的低阶畸变情况。

3.4 Zernike 模式的直接斜率法

Zernike 模式的直接斜率法跳过波前重构步骤, 直接建立斜率信息和驱动电压之间的关系, 即直接斜率

法是模式法的简化^[48]。

直接斜率法原理为: 首先, 运用推拉法计算系统响应矩阵, 并将结果存储起来, 方便在后续步骤中直接调用; 然后, 利用 Zernike 多项式描述波前传感器测量的斜率信息; 接着, 建立斜率与驱动电压的关系并调用响应矩阵, 使用最小二乘法求解驱动电压; 最后, 将其施加到变形镜上, 实现校正的目的。

3.4.1 系统响应矩阵的标定

为了校正畸变, 需要建立波前传感器检测数据与变形镜所施加电压之间的关系, 即系统响应矩阵 l_w 。根据式(4)和式(5)可得

$$S = l_w U = 2l_w B U \quad (9)$$

其中, S 为波前传感器采集的斜率矩阵, l_w 为斜率信息到驱动电压的转换矩阵, 也是系统的响应矩阵。

推拉法是一种经典的响应矩阵标定算法, 在保证其它发送电压值为零的情况下, 分别对变形镜的各个驱动器施加正向和负向的单位电压, 并用波前传感器采集波前斜率, 便可获取斜率和驱动电压之间的关系^[44]。设 $U = [U_1, U_2, \dots, U_p]$, $l_w = [l_{w,1}, l_{w,1}, l_{w,p}]$, 其中 $l_{w,p}$ 为第 p 个驱动器的响应矩阵。

$$l_{w,k} = \frac{S_k^+ - S_k^-}{2U} = \left[\frac{S_{x1}^+ - S_{x1}^-}{2U} \dots \frac{S_{xt}^+ - S_{xt}^-}{2U} \dots \frac{S_{xp}^+ - S_{xp}^-}{2U} \right] \quad (10)$$

其中, S_{xt}^+ , S_{xt}^- , S_{yt}^+ , S_{yt}^- 分别表示施加正向或反向电压时, 波前传感器在 x 和 y 轴上的第 t 个斜率值。依据式(10), 对变形镜上的每一驱动器进行扫描, 便可得到总响应矩阵。

3.4.2 直接斜率法

当波前传感器采集的斜率矩阵为 S 时, 将 U 施加在变形镜上, 可以大幅度地减少畸变^[34], 其表达式为

$$U = \frac{1}{2} B^{-1} l_w^{-1} S \quad (11)$$

因此, 直接斜率法将控制函数的计算转化为系统响应函数的计算。此算法数学原理直观、计算效率高、实时性强、实现便捷, 主要适用于波前斜率变化较大的情况, 但校正误差相对偏大。这主要归因于实际情况下波前传感器测量的斜率与波前校正器驱动电压之间的非线性关系难以完全线性化, 从而引入了不可避免的非线性建模误差^[39]。

3.5 Gauss-Seidel 迭代控制算法

Gauss-Seidel 迭代控制算法是基于直接斜率法提出的, 旨在解决大规模自适应光学系统中的延时与计算量问题。该算法首先采用推拉法完成响应矩阵的计

梁静远,张馨文,柯程虎,等: Zernike 多项式波前畸变校正研究进展

算,并将其结果存储。设定变量值且计算相关参数后,利用 Zernike 多项式描述波前传感器测量的斜率信息,把 Zernike 系数代入迭代公式求解驱动电压值,同时判定结果是否符合终止条件。若满足,则表明算法已收敛,可直接将驱动电压发送至变形镜;若不满足,则重复反馈流程,直至满足条件。完成一次迭代之后,立即开始下一轮的数据测量,再次开展迭代计算与校正工作^[39]。

本文对式(4)进行改写,在其两侧同乘以 $I_w^T I_w$, 所得到的公式与线性方程组 $Px = I_w^T S$ 形式相同, $P = I_w^T I_w$ 、 $x = U$, 通过将矩阵 P 拆解为对角矩阵 Q 、严格下三角矩阵 L 和严格上三角矩阵 Y 的组合,可将原问题求解转化为等价的线性方程组求解。同解线性方程对应的迭代表达式为

$$U(u+1) = -(Q+L)^{-1} YU(u) + (Q+L)^{-1} I_w^T \quad (12)$$

其中, u 表示迭代次数。如果计算得出的最大差值 $U(u+1) - U(u)$ 处于设定的迭代误差范围之内,那么当前迭代过程结束,此时获得的控制电压值将用于波前校正操作。否则,继续进行迭代运算。

对于大规模自适应光学系统, Gauss-Seidel 迭代控制算法能够依据稀疏矩阵相乘原理降低运算量,并且在参数配置合理的情况下,展现出快速的收敛性能。然而,由于算法复杂度、收敛性和参数取值范围等问题,其在实际应用中存在一定的限制^[40]。

3.6 Zernike 模式的自适应控制算法

Zernike 模式的自适应控制算法属于有波前自适应光学系统的校正算法之一。WANG P 等人^[49]推导了电压影响后变形镜面型变化 $\Delta\phi(x, y)$ 和第 k 个驱动器电压值 V_k 之间的关系: $\Delta\phi(x, y) = \varphi(x, y) - \varphi_0(x, y)$, $\Delta\phi(x, y)$ 可由 p 阶 $\psi_k(x, y)$ 多项式进行展开, 加权系数为 V_k^2 , p 表示变形镜驱动器的数量。其中, $\psi_k(x, y)$ 可由 q 阶 Zernike 多项式进行展开, 加权系数为 d_{jk} , d_{jk} 表示第 k 个驱动器的第 j 项系数。将系数 $V_k^2 d_{jk}$ 化简为矩阵形式如式(13)所示。

$$C = DV \quad (13)$$

其中, C 是电压影响后变形镜的 Zernike 系数矩阵, V 是驱动电压平方矩阵, D 是变形镜影响函数矩阵。

变形镜变化的目的是产生共轭相位,以抵消光束的畸变,即变形镜产生的形变与波前畸变相抵消从而实现校正。而自适应控制算法能够将波前重构的像差直接转换为变形镜的驱动电压,可以根据波前畸变的情况,实时调整校正参数,获得高精度的校正效果。自动检测和校正减少了人工干预,提高了工作效率。但

是,此算法需要对大量信息进行计算,需要高精度的波前传感器和校正器,导致系统成本较高。

3.7 Zernike 模式的随机并行梯度下降算法

Zernike 模式的随机并行梯度下降算法是最常见的无模型的无波前自适应光学系统的校正算法,同时也是 Zernike 模式的优化算法。此算法将 Zernike 多项式系数作为控制参数,借助迭代的方式,沿着梯度下降的方向持续搜索,从而优化校正参数。经过不断迭代后,最终将系数转化为驱动电压 $U(u)$, 如式(14)所示。

$$U(u) = G^{-1} G_1 z(u) \quad (14)$$

其中, $z(u)$ 表示第 u 次迭代的控制参数, G 和 G_1 表示影响函数的自相关和互相关函数。在处理低阶畸变时,采用 Zernike 模式分析不仅便捷,而且校正效果最佳。此方法巧妙地以 Zernike 作为媒介,通过揭示相位扰动与残余相位之间的内在联系,提高算法的收敛速度和校正效率^[51]。

与其它算法相比, Zernike 模式的随机并行梯度下降算法适用于多控制变量的复杂系统的优化校正过程,并行处理多个控制参数的扰动和测量,具备实现简便、收敛速度快以及效率高的优势。但是,此算法需要多次迭代才能收敛,系统性能依赖于参数的设置。

3.8 Zernike 模式的遗传算法

遗传算法是一种受自然界生物进化启发的全局搜索优化算法,它通过模拟生物种群中的自然选择与遗传机制,不断进行探索迭代,从而优化校正参数,以达到最佳校正效果。Zernike 模式的遗传算法是一种无模型的无波前自适应光学系统校正算法,同时也是 Zernike 模式优化算法。具体而言,该算法首先生成初始的静态畸变波前,并对其进行基因编码以生成初始种群。然后,计算种群中个体在经过交叉、变异后的适应度值,最终获得适应度值达到设定目标的个体,即 Zernike 系数。将这些 Zernike 系数转化为驱动电压,用于控制变形镜面型的变化。

与其它算法相比,遗传算法大幅削减了变量数,且在优化完成后只需一步矩阵乘法即可得到驱动电压,在确保校正效果的同时极大地提升了运算速度^[52]。该算法具有并行处理多个候选解的能力,能够跳出局部最优解找到最接近的全局最优解,这些优点使得遗传算法适用于复杂的波前畸变校正。与随机并行梯度下降算法一样,面对多单元的变形镜时,也可以利用 Zernike 多项式作为种群的个体,进而提升算法的速度和效率,将复杂的像差优化问题转化为 Zernike 系数优化问题^[40]。然而,此算法需要对大量个体进行计算,

表 1 8 种 Zernike 算法的校正效果对比情况

算法名称	文献	校正效果	优点	缺点
模式法	[53]	波前残差小于 0.25λ , 环带宽为 8 Hz。	准确性高、计算简单、灵活性高	设备要求高、复杂度高
几何光学近似算法	[36]	在 5 次迭代后,斯特列尔比收敛到局部极值。湍流强度由 5 增至 20 时,迭代次数由 2 增至 3,测量次数由 128 增至 192。扰动因子 ≤ 0.01 时,系统可稳定收敛到极值。增加阶数可提升斯特列尔比,但收敛速度会下降	计算简单高效、直观易懂	精度有限、使用范围有限
Martin J. Booth 算法	[54]	当式(9)的 ε 为 0.1^{65} 时,校正后斯特列尔比大于 0.9。当阶数增加,测量次数增多,算法优化解逐渐减小,校正误差增大	适用于矢量像差校正、精度高	设备要求高、算法复杂
直接斜率法	[34]	对于 21 阶像差,校正后残差波前峰值由 18.17 rad 减至 3.58 rad ,均方根值由 2.3 rad 减至 0.53 rad	实时性好、精度高	使用范围有限、设备要求高、噪声敏感
	[42]	8 ms 完成畸变校正,校正后波前相位差异减小,均方根值为 0.5,斯特列尔比达到 0.8。径向频率数小于 3 和大于 3,系数分别大于 0.15 和小于 0.1		
改进直接斜率法	[41]	对于 30 阶像差,误差精度由 10^{-3} 减至 10^{-9} 时,波前峰值由 $0.24 \mu\text{m}$ 减至 $0.19 \mu\text{m}$,均方根值由 $0.014 \mu\text{m}$ 减至 $0.013 \mu\text{m}$,Zernike 系数值大幅下降,迭代次数增加		
自适应控制算法	[50]	校正后波前与单位圆波前的差值均方根为 0.17λ ,校正效果好。在 30 次迭代后,迭代时间为 1.02 s 。校正后均方根值由 0.4 减至 0.1,斯特列尔比由 0.04 增至 0.23,峰谷值由 2.6 减至 0.9。光斑强度明显增加,明暗分布均匀	实时性高、精度高、自动化程度高	算法复杂、计算量大、设备要求高
随机并行梯度下降算法	[51]	对于 20 阶像差在 139 次迭代后,斯特列尔比达到 0.8。此算法较常规算法收敛速度提升 29.4%	具有并行处理能力、实时性高	收敛速度慢、初始参数敏感
遗传算法	[52]	在 200 次迭代后,适应度函数基本收敛,适应度值达到 0.95。校正后波前峰谷值由 3.38λ 减至 0.52λ ,均方根由 0.64λ 减至 0.06λ ,斯特列尔比由 0.06 增至 0.95,光斑变得集中	全局搜索能力强、能处理复杂系统、具有并行处理能力	计算量大、收敛速度慢

需经过多次迭代才能收敛,其系统性能依赖于参数的设置。本文列出了 8 种算法的校正效果对比情况如表 1 所示。

4 结束语

本文首先总结了 Zernike 多项式波前畸变校正技术在国内外的研究进展,然后阐述了有波前和无波前自适应光学系统的运行机制,最后重点对利用 Zernike 多项式进行波前畸变校正的 8 种控制算法的校正原理、校正效果以及优缺点进行了介绍。

Zernike 多项式的使用极大地简化了波前畸变的数学表达难度,将其与控制算法结合能够进一步提升校正系统的精度和实时性。在未来,Zernike 多项式畸变校正的发展呈现出全面且深入的趋势:研究人员不断研发更精确的波前重构算法,追求具有更高实时性和更快响应速度的算法,优化变形镜和波前传感器的结构以提高校正能力,还将算法与强化学习相结合等。这不仅彰显了 Zernike 多项式的巨大潜能,还为未来的研究开拓了新的方向。

参考文献:

[1] 喻响,董冰.基于变形镜本征模式的无波前传感器自适应光学系统

实验研究[J].光学学报,2015,35(3):294-301.

[2] LUKOSZ W. Der einflu der aberrationen auf die optischeu bertragungsfunktion bei kleinen orts-frequenze[J]. Optica Acta, 1963, 10: 1-19.

[3] NOLL R J. Zernike polynomials and atmospheric turbulence[J]. Journal of the optical society of america, 1976, 66(3): 207-211.

[4] BABCOCK H W. The possibility of compensating astronomical seeing[J]. Publications of the Astronomical Society of the Pacific, 1953, 65: 229-236.

[5] FRIED D L. Special issue on adaptive optics[J]. JOSA, 1977, 67(3): 4-22.

[6] HARDY J W. Active optics: a new technology for the control of light[J]. Journal of the Optical Society of America A, 1978, 66(6): 651-697.

[7] RODDIER N A. Atmospheric wavefront simulation using Zernike polynomials[J]. Optical Engineering, 1990, 29(10): 1174-1181.

[8] DANIEL M H, MARTIN C V, JOSE J S. Wavefront fitting with discrete orthogonal polynomials in a unit radius circle[J]. Optical Engineering, 1990, 29(6): 672-676.

[9] UPTON R, ELLERBROEK B. Gram-Schmidt orthogonalization of the Zernike polynomials on apertures of arbitrary shape[J]. Optics Letters, 2004, 29(24): 2840-2852.

[10] MAHAJAN V N, AFTAB M. Systematic comparison of the use of annular and Zernike circle polynomials for annular wavefronts[J]. Applied Optics, 2010, 49(33): 6489-6501.

[11] OYA S, BOUVIER A, GUYON O, et al. Performance of the deformable mirror for Subaru LGSAO[J]. SPIE, 2006, 6272: 1523-1530.

[12] SEIFERT L, TIZIANI H J, OSTEN W. Wavefront reconstruction with the adaptive Shack-Hartmann sensor[J]. Optics Communications, 2005, 245(16): 255-269.

梁静远,张馨文,柯程虎,等: Zernike 多项式波前畸变校正研究进展

- [13] HEMMATI H, CHEN Y J, CROSSFIEL D. Telescope wavefront aberration compensation with a deformable mirror in an adaptive optics system [C]//SPIE. Proceedings of Conference on Free-Space Laser Communication Technologies XVIII. Seattle: SPIE, 2006: 123–127.
- [14] DUNCAN T S, VOAS J K, EAGER R J, et al. Low-latency adaptive optical system processing electronics [J]. Publications of the Astronomical Society of the Pacific, 2003, 4839: 924–934.
- [15] GENDRON E, CUBY J, RIGAUT F, et al. Come-on-plus project: an upgrade of the come-on adaptive optics prototype system[J]. Publications of the Astronomical Society of the Pacific, 1991, 1542: 297–297.
- [16] WILKS S C, MORRIS J R, BRASE J M, et al. Modeling of adaptive-optics-based free-space communications systems [C]//SPIE. Proceedings of Conference on Free-space Laser Communication and Laser Imaging. Seattle: SPIE, 2002: 121–128.
- [17] PASUPATHI T, SELCI J A V, SAMUEL J N. Mitigation of low-order atmospheric turbulent effects using sensor less adaptive optics in terrestrial free space optical communication [C]//IEEE. Proceedings of 2016 International Conference on Emerging Trends in Engineering, Technology and Science (ICETETS). Pudukkottai: IEEE, 2016: 1–6.
- [18] BOOTH M J, DÉBARRE D, JESACHER A. Adaptive optics for biomedical microscopy[J]. Optics and Photonics News, 2012, 23(1): 22–29.
- [19] TOSELLI I, GLADYSZ S. Improving system performance by using adaptive optics and aperture averaging for laser communications in oceanic turbulence[J]. Optics Express, 2020, 28(12): 17347–17361.
- [20] RUKOSUEV A, NIKITIN A, TOPOROVSKY V, et al. Real-time correction of a laser beam wavefront distorted by an artificial turbulent heated airflow[J]. Photonics, 2022, 9(5): 351–351.
- [21] SHIKHOVTSEV A Y, KOVADLO P G, CHUPRAKOV S A, et al. Correction of wavefront distortions in wide-field adaptive optics systems[C]//SPIE. Proceedings of Institute of Solar-Terrestrial Physics (Russian Federation) V E, Zuev Institute of Atmospheric Optics(Russian Federation). Bellingham: SPIE, 2023: 12780-1–12780-16.
- [22] JEON H, HUS S, PARK J, et al. Wavefront distortion correction in scanning tunneling microscope image[J]. The ReView of Scientific Instruments, 2024, 95(50): 53710-1–53710-19.
- [23] 姜文汉. 动态波前误差的自适应光学实时校正[J]. 光学学报, 1988, 8(5): 441–447.
- [24] 姜文汉, 吴旭斌, 凌宁, 等. 37 单元自适应光学系统[J]. 光电工程, 1995, 22(1): 38–45.
- [25] 严海星, 张德良, 李树山. 自适应光学系统的数值模拟: 直接斜率控制法[J]. 光学学报, 1997(6): 119–126.
- [26] 管保柱, 陈海清, 程鹏辉. 基于激光钠导星的星载自适应光学系统[J]. 激光与光电子学进展, 2004, 41(8): 20–23.
- [27] 罗智锋, 陈怀新, 丁磊. 利用 Zernike 法进行激光小尺度畸变波前的重构[J]. 激光杂志, 2006, 27(3): 35–36.
- [28] 杨平, 敖明武, 刘渊, 等. 基于泽尼克模式系数的自适应光学遗传算法[J]. 中国激光, 2008, 35(3): 367–372.
- [29] 杨慧珍, 蔡冬梅, 陈波, 等. 无波前传感自适应光学技术及其在大气光通信中的应用[J]. 中国激光, 2008, 35(5): 680–684.
- [30] 杨慧珍, 李新阳. 基于 Zernike 模式的自适应光学系统随机并行梯度下降算法[J]. 强激光与粒子束, 2009, 21(5): 645–648.
- [31] HUANG L H, RAO C H. Wavefront sensorless adaptive optics: a general model-based approach[J]. Optics Express, 2009, 19(1): 371–379.
- [32] 夏利军, 李晓峰. 基于自适应光学的大气光通信波前校正实验[J]. 信息与电子工程, 2010, 8(3): 331–335.
- [33] 王卫兵, 照帅, 郭劲. 遗传算法在激光整形中的应用[J]. 激光与红外, 2012, 10: 27–31.
- [34] 许泽帅, 羊毅, 兰卫华, 等. 直接斜率法畸变波前校正的研究[J]. 激光与光电子学进展, 2014, 51(4): 32–36.
- [35] 杨慧珍, 吴健, 龚成龙. 基于模型的无波前探测自适应光学系统[J]. 光学学报, 2014, 34(8): 15–19.
- [36] 王志强, 张鹏飞, 乔春红, 等. 基于普适模型的无波前探测自适应光学系统仿真与分析[J]. 中国激光, 2016, 43(9): 190–197.
- [37] 吴加丽, 柯熙政. 无波前传感器的自适应光学校正[J]. 激光与光电子学进展, 2018, 55: 133–139.
- [38] 谭振坤, 柯熙政, 王姣. 外差探测系统波前校正实验研究[J]. 仪器仪表学报, 2018, 39(12): 121–127.
- [39] 罗琳, 佟首峰, 张雷, 等. 基于自适应光学系统的波前处理算法研究[J]. 激光与红外, 2019, 49(10): 1245–1251.
- [40] 梁殿明, 王超, 史浩东, 等. 基于 Zernike 模型系数优化的椭圆型窗口光学系统像差校正[J]. 物理学报, 2020, 69(24): 153–160.
- [41] 张丹玉. 自适应光学波前畸变控制及实验研究[D]. 西安: 西安理工大学, 2021.
- [42] 王凯迪. 大气湍流波前畸变的自适应光学校正技术研究[D]. 西安: 中国科学院大学, 2021.
- [43] 梁静远, 林水清, 韩美苗, 等. 自适应光学中的模式法[J]. 现代应用物理, 2023, 14(2): 21–36.
- [44] 杨尚君. 无线光相干通信中的自适应光学技术及实验研究[D]. 西安: 西安理工大学, 2024.
- [45] 吕典楷. 面向全局寻优的自由空间光通信波前畸变校正算法研究[D]. 重庆: 重庆邮电大学, 2022.
- [46] 柯熙政, 杨珂, 张颖. CAPIS 技术探测波前畸变的实验研究[J]. 激光与光电子学进展, 2019, 56(12): 30–37.
- [47] KE X Z, ZHANG D Y. Fuzzy control algorithm for adaptive optical system[J]. Applied Optics, 2019, 58(36): 9967–9975.
- [48] DÉBARRE D, BOOTH M J, WILSON T. Image based adaptive optics through optimization of low spatial frequencies[J]. Optics Express, 2007, 15(13): 8176–8190.
- [49] WANG P, HADAEH F Y. Computation of static shapes and voltages for micromachined deformable mirrors with nonlinear electrostatic actuators[J]. Journal of Microelectro Mechanical System, 1996, 5(3): 205–220.
- [50] 夏爱利. 基于 Shack-Hartmann 波前传感器的自适应光学系统研究[D]. 西安: 中国科学院研究生院, 2011.
- [51] 杨慧珍, 苏杭, 张之光. 基于 K-L 模式的 SPGD 控制算法波前校正[J]. 中国激光, 2023, 50(14): 141–147.
- [52] 杨平, 敖明武, 刘渊, 等. 基于泽尼克模式系数的自适应光学遗传算法[J]. 中国激光, 2008, 35(3): 367–372.
- [53] HU W. Research on distortion wavefront processing technology based on pattern method[D]. Chengdu: University of Electronic Science and Technology of China, 2017.
- [54] BOOTH M J. Wave front sensorless adaptive optics: a model based approach using sphere packings[J]. Optics Express, 2006, 14(4): 1339–1352.